# Chương 6

# CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI LŨY THỪA

Trong chương này, chúng tôi trình bày những khái niệm và tính chất cơ bản thường được sử dụng về chuỗi số. Một số tính chất cơ bản về chuỗi số dương, chuỗi đan dấu như tiêu chuẩn Leibnitz cũng được giới thiệu. Chúng tôi cũng đưa ra những khái niệm cơ bản mang tính chất giới thiệu về chuỗi hàm, phần quan trọng mà chúng tôi muốn nhấn mạnh ở đây là khảo sát sự hội tụ cũng như khai triển một số hàm thường gặp thành chuỗi lũy thừa.

## 6.1. Chuỗi số

### 6.1.1. Các khái niệm cơ bản

**1. Định nghĩa**

Cho dãy số vô hạn $(u_n)_{n\in Z^+}$, tổng vô hạn

$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ được gọi là chuỗi số, ký hiêu là: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

$u_n$ được gọi là số hạng thứ n.

**2. Dãy tổng riêng**

Đặt $s_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

$(s_n)_{n\in Z^+}$ được gọi là dãy tổng riêng của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

**3. Chuỗi số hội tụ, phân kỳ**

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là hội tụ nếu tồn tại giới hạn $\underset{n\to\infty}{Lim}\, s_n=s$ và $s$ được gọi là tổng của nó. Ta viết: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$.

Nếu giới hạn $\underset{n\to\infty}{Lim}\, s_n$ không tồn tại hay bằng $\infty$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là phân kỳ và khi đó chuỗi số không có tổng.

**4. Phần dư thứ n**

Trong trường hợp chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ có tổng bằng $S$ thí hiệu $S$-$S_n$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, ký hiêu là: $r_n$

Vậy, dưới dạng ngôn ngữ “ε-N”, ta có:

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow |s - s_n| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow |r_n| < \varepsilon$

**5. Các ví dụ**

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + ... + q^n + ...$(tổng cấp số nhân vô hạn)

Ta có tổng riêng $S_n = 1 + q + ... + q^n$. Xét các trường hợp sau

a) q ≠ 1

Ta có $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \infty, & |q| > 1 \\ \dfrac{1}{1-q}, & |q| < 1 \end{cases}$

b) q = 1

Ta có $S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$ Do đó: $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$

c) q = -1

Ta có $S_n = 1 - 1 + 1 - ... = \begin{cases} 1, \ n = 2k + 1 \\ 0, \ n = 2k \end{cases}$. Do đó $\lim_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại

Vậy $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, hội tụ, nếu $|q| < 1$.

Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ phân kỳ nếu $|q| \geq 1$ thì chuỗi phân kỳ

2) Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

$$s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 1$ Vậy, chuỗi số đã cho hội tụ và có tổng bằng 1.

### 6.1.2. Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy

**1. Tiêu chuẩn Cauchy**

*Chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : p > q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| < \varepsilon$.

**2. Ví dụ**

Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chứng tỏ rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Giải

$\exists\ \varepsilon = \frac{1}{3}: \forall N,\ \exists\ p = 2N > q = N \geq N: \left|s_p - s_q\right| = \left|s_{2N} - s_N\right| =$

$= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + ... + \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon$

### 6.1.3. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

**1. Định lý**

*Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chứng minh:

Gọi s là tổng của chuỗi số hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$

Suy ra $u_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} s - s = 0$

**2. Hệ quả**

*Nếu* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

*Ví dụ*

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ phân kỳ vì $u_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} \neq 0\ \ khi\ \ n \to \infty$

**3. Chú ý**

$u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *chỉ là điều kiện cần mà không đủ để chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*

Chẳng hạn, xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

Mà $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Vậy, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

### 6.1.4. Tính chất cuả chuỗi số hội tụ

**1.Tính chất 1**

*Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ có tổng là s, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ có tổng là s' thì các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ cũng hội tụ và có tổng là s ± s'*

Chứng minh:

Gọi $s_n$ và $s'_n$ lần lượt là các tổng riêng thứ n của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Khi đó, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ và $\lim_{n\to\infty} s_n^/ = s^/ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n + s_n^/) = s + s^/ \Rightarrow$ đ.p.c.m

*Ví dụ*

Tính tổng của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$

Giải

Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \text{ và}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

**2. Tính chất 2**

*Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ có tổng là s thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ cũng hội tụ và có tổng là ks.*

Chứng minh:

Gọi $s_n$ lần lượt là tổng riêng thứ n của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ks_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = ks \Rightarrow$ đ.p.c.m.

**3. Tính chất 3**

*Tính hội tụ hay phân kỳ của 1 chuỗi số không thay đổi khi ta ngắt bỏ đi khỏi chuỗi số đó 1 số hữu hạn các số hạng đầu tiên.*

Chứng minh:

Nếu bớt đi từ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ m số hạng đầu tiên, ta được chuỗi số $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$

Gọi $s_n$ và $s'_k$ lần lượt là các tổng riêng thứ n và thứ k của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$

$$\Rightarrow s'_k = s_{m+k} - s_m$$

* Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ $\Rightarrow s_{m+k} \xrightarrow{m+k\to\infty} s \Rightarrow s'_k \xrightarrow{k\to\infty} s - s_m \Rightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ $\Rightarrow s_{m+k}$ không có giới hạn khi $k\to\infty$ và do $s_m$ hữu hạn $\Rightarrow s'_k$ không có giới hạn khi $k \to \infty \Rightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

*Ví dụ*

Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

Giải

Chuỗi này suy từ chuỗi điều hoà bằng cách ngắt bỏ đi 3 số hạng đầu tiên. Mà chuỗi điều hoà phân kỳ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ cũng phân kỳ.

Bài tập

Tính tổng của các chuỗi sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{10^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

## 6.2. Chuỗi số dương

### 6.2.1. Định nghĩa

Chuỗi số dương là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, mà $u_n > 0, \forall n \geq 1$

*Ví dụ*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}.3^n}$ là chuỗi số dương.

### 6.2.2. Định lý

*Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy ($s_n$) bị chặn trên.*

Chứng minh:

Vì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nên dãy *($s_n$)* hội tụ. Mà vì $u_n > 0, \forall n \geq 1$, suy ra dãy *($s_n$)* tăng, do đó *($s_n$)* bị chặn trên. Ngược lại nếu *($s_n$)* bị chăn trên, thì tồn tại dưới hạn, vì dãy *($s_n$)* tăng, do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

*Ví dụ*

Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ta có $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + ... + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$

Suy ra $s_n$ bị chặn. Vậy chuỗi trên hội tụ.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

Suy ra $s_n$ không bị chặn. Vậy chuỗi phân kỳ.

### 6.2.3. Các tiêu chuẩn hội tụ

#### 1. Tiêu chuẩn so sánh

#### a. Định lý

*Giả sử* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *là 2 chuỗi dương thoả* $u_n \leq v_n \quad \forall n \geq n_0$, *khi đó*

* *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*

* *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *h phân kỳ.*

Chứng minh:

Do tính chất 3 của chuỗi số hội tụ, có thể giả sử $n_0 = 1$, nghĩa là $u_n \leq v_n \quad \forall n$

* Gọi $s_n$ và $s_n$ lần lượt là tổng riêng thứ n của các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

$\Rightarrow s_n \leq s'_n \quad \forall n$ (1)

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng là $s'$, nghĩa là $\lim_{n\to\infty} s'_n = s'$

$\Rightarrow s'_n \le s' \ \forall n$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow s_n < s' \ \forall n \Rightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ $\Rightarrow s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (3)

Từ (3) và (1) suy ra: $s'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, nghĩa là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

**b. Ví dụ**

Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}.2^n}$

Do $\frac{1}{\sqrt{n}.2^n} \le \frac{1}{2^n} \quad \forall n$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi đã cho hội tụ.

2) Chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ phân kỳ vì

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}-1} \ \forall n \ge 2$ mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n + 2n}$

Ta có: $0 < \frac{2^n}{7^n + 2n} < (\frac{2}{7})^n, \ \forall n \ge 1$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n}$ hội tụ.

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Ta có:

$\frac{\ln n}{\sqrt{n}+1} > \frac{1}{\sqrt{n}+1}, \ \forall n \ge 3$

Mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}+1}$ phân kỳ.

2. Tiêu chuẩn tương đương

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ là 2 chuỗi dương thoả $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$

*1) Nếu* $0<\mathrm{k}<+\infty$ *thì hai chuỗisố* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *và,* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.*

*2) Nếu k = 0. và chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *hội tụ.*

*3) Nếu* $\mathrm{k}=+\infty$ *và chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *phân kỳ thì* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *phân kỳ.*

Chứng minh

1) Từ $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$ ta có $\forall\varepsilon>0,\exists n_0>0:\forall n\geq n_0\Rightarrow\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon$.

Do đó $\frac{u_n}{v_n}<\varepsilon+k$ suy ra $u_n<(\varepsilon+k)v_n,\forall n\geq n_0$.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon+k)v_n$ hội tụ. Theo định lý ở trên ta suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ phân kỳ thì ta cũng làm tương tự, tuy nhiên chú ý từ $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k$ suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{k}$. Vì $0<k<+\infty$ nên $0<\frac{1}{k}<+\infty$. Do đo nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì t suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ. Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

Vậy 2 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ đồng hội tụ hoặc phân kỳ.

2) Giả sử $k=0$ và $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ.

Khi đó từ giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ ta có $\forall\varepsilon>0,\exists n_0>0:\left|\frac{u_n}{v_n}\right|<\varepsilon,\forall n\ge n_0 \Rightarrow u_n<\varepsilon v_n,\ \forall n\ge n_0$.

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ, nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon v_n$ hội tụ, do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

3) Chứng minh hoàn toàn tương tự như mục (2). Giả sử $k=+\infty$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ phân kỳ. Từ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$.

Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ, vì nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì theo (ii) suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ mâu thuẫn.

Chú ý

Thường ta so sánh với chuỗi số quan trọng chuỗi cấp số nhân và chuỗi điều hoà.

*Ví dụ*

Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+1}{5^n+2n+2}$

Ta có $u_n=\frac{2^n+n^2+1}{5^n+2n+2}>0$, với mọi $n\ge 1$. Ta sẽ so sánh với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n$ hội tụ.

Dễ thấy rằng

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$, do đó chuỗi số đã cho hội tụ.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Ta có $u_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}$, với mọi $n\ge 3$.

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ ( ví dụ ở trên), nên chuỗi đã cho phân kỳ.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^2\sqrt{n}+n+2}$

Ta có $u_n=\frac{3n+1}{n^2\sqrt{n}+n+2}>0$, với mọi $n\ge 1$.

Chọn $v_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} > 0$. Ta có. Do $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 3$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ, nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^3+n+2}$ hội tụ.

**3. Tiêu chuẩn** $D^{/}Alembert$

**a. Định lý** $D^{/}Alembert$

*Nếu chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *thoả* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = D$ *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *sẽ hội tụ khi* $D<1$ *và phân kỳ khi* $D>1$

*Khi* $D=1$ *Chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *có thể hội tụ hoặc phân kỳ.*

*Khi* $D=+\infty$ *chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

Chứng minh:

* $D<1$

1 - D > 0 Chọn $\varepsilon < 1-D \Rightarrow D+\varepsilon<1$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = D \Rightarrow \exists n_0 : n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - D\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow u_{n+1} < (D+\varepsilon)u_n \quad \forall n > n_0$

$n = n_0+1: \ u_{n_0+2} < (D+\varepsilon)u_{n_0+1}$

$n = n_0+2: u_{n_0+3} < (D+\varepsilon)u_{n_0+2} < (D+\varepsilon)^2 u_{n_0+1}$

$n = n_0+k: u_{n_0+k+1} < (D+\varepsilon)^k u_{n_0+1} \ldots$

Mà chuỗi số $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(D+\varepsilon)^k u_{n_0+1}$ hội tụ do $0 < D+\varepsilon < 1$

$\Rightarrow$ Chuỗi số $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} u_n$ hội tụ $\Rightarrow$ Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* $D>1$

Chọn $\varepsilon = D-1$ hay $D-\varepsilon = 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = D \Rightarrow \exists n_0 : n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - D\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > D-\varepsilon = 1 \quad \forall n > n_0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

$\Rightarrow$ chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

* Khi $D = +\infty$: Với M=1, $\exists N : n > N \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \; \forall n > N$

$\Rightarrow u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

**b. Ví dụ**

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{(n+1)!}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2} = \infty$$

$\Rightarrow$ Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$ phân kỳ.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$ $\Rightarrow$ Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ hội tụ.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Ta có $u_n = \dfrac{2^n}{n!}, u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Do đó

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{n+1} \to 0$, khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n^2 + 1}{2^n + 3n + \ln n}$

Ta có $u_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{2^n + 3n + \ln n} \sim \dfrac{n^3}{2^n} = v_n$

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n^3} \to \dfrac{1}{2} < 1$ .

Do đó chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ

<u>Chú ý</u>

*Khi $D = 1$ thì chưa có kết luận gì, nghĩa là chuỗi đó có thể hội tụ, cũng có thể là phân kỳ.*

Chẳng hạn, xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 1$ khi $n \to \infty$. Vì $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ với mọi $n \geq 1$ nên $u_{n+1} > u_n$, với mọi n ≥ 1. Đặc biệt $u_n \geq u_1 = e$, suy ra $\lim u_n \geq e$. Do vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ phân kỳ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

**4. Tiêu chuẩn Cauchy**

*Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$. Khi đó*

*1) Nếu L < 1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ;*

*2) Nếu L > 1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.*

Chứng minh:

Giả sử: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.

- Khi L < 1. Lấy r sao cho L < r < 1. Khi đó $\exists n_0 > 0 : \sqrt[n]{u_n} < r, \forall n \geq n_0$, nghĩa là $u_n < r^n, \forall n \geq n_0$. Vì chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

- Khi L > 1. Ta có $\exists n_0 > 0 : \sqrt[n]{u_n} > 1, \forall n \geq n_0$, tức là $u_n > 1, \forall n \geq n_0$. Do đó $u_n$ không dần về 0 khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ .

Chú ý

Khi $L = 1$ thì chưa có kết luận gì, nghĩa là chuỗi đó có thể hội tụ, cũng có thể là phân kỳ.

Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n}$ hội tụ, vì $l=\frac{2}{3}<1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ phân kỳ, $l=e>1$

**5. Tiêu chuẩn tích phân Cauchy**

**a. Định lý**

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Đặt hàm số *f(x)* thỏa $f(n)=u_n, \forall n\geq 1$

Giả sử hàm f(x) đó liên tục, dương, giảm trên $[1;+\infty)$.

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ.

Chứng minh:

Theo giả thiết, ta có với mọi k, hàm *f(x)* giảm trên đoạn [k, k+1] nên $u_{k+1}=f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)=u_k$, $\forall x\in[k,k+1]$, theo định lý trung bình tích phân ta có $u_{k+1}\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq u_k$. Do đó với mọi k nên ta có

$$u_2\leq\int_1^2 f(x)dx\leq u_1,\ u_3\leq\int_2^3 f(x)dx\leq u_2,\ ...,\ u_n\leq\int_{n-1}^{n}f(x)dx\leq u_{n-1},$$

Suy ra:

$$u_2+u_3+...+u_n\leq\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_{n-1}^{n}f(x)dx=\int_1^n f(x)dx$$
$$\leq u_1+u_2+...+u_{n-1}$$

Do đó:

$$s_n-u_1\leq\int_1^n f(x)dx\leq s_{n-1}$$

Đặt $I_n=\int_1^n f(x)dx$. Ta có, $s_n-u_1\leq I_n,\ I_n\leq s_{n-1}$ (*)

($\Rightarrow$? ) Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

Theo định lý mục 2, suy ra dãy tổng riêng ($s_{n-1}$) bị chặn. Do đó từ bất đẳng thức (*) suy ra dãy $\{I_n\}$ cũng bị chặn. Hơn nữa $\lim_{n\to\infty}I_n$ dễ thấy dãy $\{I_n\}$ tăng. Do vậy tồn tại, do đó $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

($?\Leftarrow$) Giả sử $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Khi đó $\{I_n\}$ bị chặn. Từ bất đẳng thức (*) suy ra $\{S_n\}$ bị chặn, cho nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

b. Ví dụ

1) Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha \in R$ (chuỗi Riemann)

- Nếu $\alpha > 0$: đặt $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Kiểm tra thấy $f(x)$ thoả tất cả các điều kiện của định lý.

Ta biết rằng tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$

- Nếu $\alpha \le 0$ thì $\lim u_n = \lim \frac{1}{n^\alpha} \ne 0$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha \in R$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$

Ta có $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, với mọi $n \ge 3$. Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ phân kỳ, nên chuỗi đã cho phân kỳ.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4} - 1}{n\sqrt{n+1}}$

Ta có $\frac{\sqrt[3]{n^4} - 1}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n.n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ phân kỳ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4} - 1}{n\sqrt{n+1}}$ phân kỳ.

4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

Giải

Dùng tiêu chuẩn tích phân, xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$D_f = (0,+\infty)$, $f^{/}(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f^{/}(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

Bảng xét dấu đạo hàm

| $x$ | $0 \qquad\qquad e \quad 3 \qquad\qquad +\infty$ |
|---|---|
| $f^{/}$ $_{f^{/}}$ | $+ \qquad 0 \quad -$ |
| $f$ | $\nearrow \qquad\qquad \searrow$ |

Hàm $f(x)$ liên tục, đơn điệu giảm, dương trong $[3,+\infty)$

Mặt khác, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x} = \int_3^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \lim_{b\to+\infty} \int_3^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \lim_{b\to+\infty}\left( \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_3^b \right)$

$\displaystyle \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 b - \ln^2 3}{2}\right) = +\infty$ . Vậy chuỗi $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ phân kỳ.

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ liên tục, dương trên $[2,+\infty)$ và $u_n = f(n) \quad \forall n \geq 2$

$f^{/}(x) = -\dfrac{\ln x + 1}{x^2\ln^2 x} < 0 \quad \forall x > 1 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $[2,+\infty)$

Mặt khác, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty}[\ln|\ln x|]_2^b = \lim_{b\to+\infty}\Big[\ln|\ln b| = \ln|\ln 2|\Big] = +\infty$

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân.

<u>Bài tập</u>

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+2}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.4.9...n^2}{1.3.5.7...(4n-3)}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{5n+3}{5n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2}$

### 6.3. Chuỗi số đan dấu - Chuỗi số có dấu bất kỳ

#### 6.3.1. Chuỗi đan dấu

**1. Định nghĩa**

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có dạng

$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$ hay $-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots$ , (1)

Trong đó $u_n > 0, \quad \forall n \geq 1$

Ví dụ

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$

Ta quy ước chỉ xét chuỗi đan dấu có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ .

**2. Định lý Leibnitz**

**a. Định lý**

*Nếu dãy* $\{u_n\}$ *là một dãy giảm và* $u_n \to 0$ *khi* $n \to \infty$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ *hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \leq u_1$ .

Chứng minh:

Để chứng tỏ dãy tổng riêng ($s_n$) hội tụ ta chứng minh nó có 2 dãy con hội tụ ($s_{2m}$) và ($s_{2m+1}$)

Ta có $s_{2(m+1)} = s_{2m+2} = s_{2m} + (u_{2m+1} - u_{2m+2}) > s_{2m}$ => ($s_{2m}$) tăng

Mặt khác, ta cũng có

$s_{2(m+1)} = u_1 - \left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + (u_6 - u_7) + \ldots (u_{2m} - u_{2m+1})\right] < u_1$

$\Rightarrow$ Dãy ($s_{2m}$) hội tụ về $s \leq u_1$

Chú ý rằng $s_{2m} > 0 \ \forall m$

Ta lại có: $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$

Do $u_n \to 0 \Rightarrow u_{2m+1} \to 0$

$\Rightarrow s_{2m+1} \to s + 0 = s$

$s_{2m} \to s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_1 : m > m_1 \Rightarrow |s_{2m} - s| < \varepsilon$

$s_{2m+1} \to s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_2 : m > m_2 \Rightarrow |s_{2m+1} - s| < \varepsilon$

Đặt $N = \max(2m_1, 2m_2 + 1)$

Khi đó, $\forall n > N$ có 2 khả năng

* $n = 2k > 2m_1 \Rightarrow k > m_1 \Rightarrow |s_{2k} - s| < \varepsilon$

* $n = 2k + 1 > 2m_2 + 1 \Rightarrow k > m_2 \Rightarrow |s_{2k+1} = s| < \varepsilon$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$ (đ.p.c.m)

**b. Ví dụ**

Xét sự hội tụ cua chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$

<u>Giải</u>

$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và dãy $(u_n)$ đơn điệu giảm $\Rightarrow (u_n)$ hội tụ thươo Leibnitz

và tổng $s \le u_1 = 1$

**c. Chú ý**

*Nếu chuỗi (1) thoả Leibnitz và hội tụ về s thì chuỗi*

$-(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...)$ *hội tụ về -s*

*Như vậy nếu các giả thiết của định lý Leibnitz được thoả thì chuỗi đan dấu*

$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...)$ *hội tụ và tổng s của nó thoả* $|s| \le u_1$.

**d. Tính gần đúng tổng của chuỗi đan dấu hội tụ**

Nếu chuỗi đan dấu $\pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...)$ thoả Leibnitz thì chuỗi phần dư thứ n $u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ cũng hội tụ theo Leibnitz và theo chú ý ở trên ta có: $|r_n| \le u_{n+1}$

Theo định lý Leibnitz, ta chỉ biết chuỗi đan dấu hội tụ nhưng không rõ $S$ bằng bao nhiêu nên nảy sinh vấn đề ước lượng tổng $S$.

Ta xem s ≈ $s_n$ sẽ vấp phải sai số tuyệt đối là: $|s - s_n| = |r_n| \le u_{n+1}$

*Ví dụ*

Trở lại chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$, nếu ta xem

$s \approx s_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \approx 0,5 + 0.33 - 0,25 + 0,2 \approx 0,78$

Vấp phải sai số tuyệt đối là $|r_5| \le u_6 = \frac{1}{6} \approx 0,167$

Thông thường ta gặp bài toán ngược lại

" Phải chọn $n$ tối thiểu bằng bao nhiêu để giá trị gần đúng $s_n$ của chuỗi đan dấu chính xác đến δ ( nghĩa là sai số tuyệt đối không vượt quá δ)''.

Áp dụng vào ví dụ trên, ta phải chọn $n$ sao cho: $|r_5| \le u_6 \le \delta$

Chẳng hạn $\delta = 0.001$, thế thì $n$ phải thoả $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n+1 \le 1000 \Leftrightarrow n \ge 999$

Vậy, $n$ tối thiểu là 999.

### 6.3.2. Chuỗi có dấu bất kỳ

**1. Định lý**

*Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ.*

Chứng minh

Gọi $s_n$ và $s'_n$ lần lượt là tổng riêng thứ $n$ của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$,

nghĩa là $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n$ và $s_n' = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots |u_n|$

Trong chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ký hiệu

$s_n^+$ là tổng của tất cả các số hạng dương trong $n$ số hạng đầu tiên

$s_n^-$ là tổng các giá trị tuyệt đối của tất cả các số hạng âm trong $n$ số hạng đầu tiên. Ta có

$s_n = s_n^+ - s_n^-$ và $s_n' = s_n^+ + s_n^-$

Rõ ràng $(s_n^+)$ v à $(s_n^-)$ là những dãy tăng và $s_n^+ \le s_n', s_n^- \le s_n'$ (1)

Theo giả thiết, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ $\Rightarrow s_n' \to s'$ và $s_n' < s' \ \forall n$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $s_n^+ < s' \ \forall n, \ s_n^- < s' \ \forall n$

Suy ra rằng các dãy số $(s_n^+)$ và $(s_n^-)$ đều hội tụ (vì đều tăng và bị chặn trên.)

Do đó $(s_n)$ cũng hội tụ.

**2. Định nghĩa**

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

**3. Ví dụ**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ hội tụ tuyệt đối.

Giải

Ta có $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| = \frac{|\sin nx|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} \quad \forall n$

mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ hội tụ ( Chuỗi Riemann với $\alpha = 3 > 1$)

**4. Chú ý**

Điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nghĩa là có trường hợp chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ, ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ.

*Ví dụ*

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$ bán hội tụ vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hoà phân kỳ.

*Ví dụ*

Xét tính hội tụ của các chuỗi số

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Ta có $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, do đó chuỗi đã cho hội tụ

2) $\sum (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

Ta có

$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{2n+1}{3n+1} \to \frac{2}{3} < 1$ =>Chuỗi đã cho hội tụ.

Chú ý

Nếu chuỗi $\sum |u_n|$ phân kỳ thì chưa kết luận chuỗi $\sum u_n$ hội tụ hay phân kỳ. Tuy nhiên, nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy mà biết được $\sum |u_n|$ phân kỳ thì $\sum u_n$ cũng phân kỳ.

Thật vậy, từ

$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1 \Leftrightarrow |u_{n+1}| > |u_n| > |u_{n_0}| > 0, \forall n \ge n_0 > 0$ , do đó $u_n$ không dần về 0, tức là $u_n$ không tiến về 0, suy ra chuỗi phân kỳ.

*Ví dụ*

$$\sum(-1)^n \frac{e^{n^2}}{n!}$$

Ta có $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{e^{(n+1)^2}}{(n+1)!}.\frac{n!}{e^{n^2}} = \frac{1}{n+1}e^{2n+1} \to +\infty$. Do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

Trường hợp $\sum|u_n|$ phân kỳ nhưng $\sum u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum u_n$ được gọi là bán hội tụ.

*Ví dụ*

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ là bán hội tụ.

Bài tập

1) Chứng tỏ rằng các chuỗi số sau bán hội tụ

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ $\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{n^2+1}$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2+1}{n^3+3}$ $\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ $\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$

2) Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n!}$

a) Chứng tỏ rằng chuỗi số này hội tụ theo Leibnitz, hơn thế nữa nó còn hội tụ tuyệt đối.

b) Phải chọn $n$ tối thiểu là bao nhiêu để $s_n$ là trị gần đúng của tổng của chuỗi với độ chính xác $\delta = 0{,}001$

## 6.4. Chuỗi luỹ thừa

### 6.4.1. Chuỗi hàm

#### 1. Định nghĩa

Chuỗi hàm là chuỗi $\sum u_n(x)$, trong đó các $u_n(x)$ là các hàm của x.

Khi x = $x_o$ thì chuỗi hàm trở thành chuỗi số $\sum u_n(x_0)$. Nếu chuỗi số hội tụ thì điểm $x_o$ gọi là điểm hội tụ, nếu nó phân kỳ thì $x_o$ gọi là điểm phân kỳ.

- Tập hợp tất cả các điểm x mà chuỗi hàm hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

- $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$: gọi là tổng riêng thứ $n$ của chuỗi hàm.

- Nếu $\lim s_n(x) = s(x)$ thì S(x) gọi là tổng của chuỗi hàm. Trong trường hợp này, $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$: gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm. Do đó ta có $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2} + ...$

**2. Ví dụ**

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Chuỗi này hội tụ với mọi x thoả |x| < 1 và có tổng $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi trên là X = (-1; 1)

2) $\sum \dfrac{1}{n^x}$ có miền hội tụ là $X = (1;+\infty)$ (theo kết quả của chuỗi Riemann đã biết)

3) $\sum \dfrac{\cos nx}{n^3 + x^2}$

Ta có $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3 + x^2}\right| \le \dfrac{1}{n^3 + x^2} \le \dfrac{1}{n^3}, \forall x$. Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ hội tụ nên $\sum \dfrac{\cos nx}{n^3 + x^2}$ hội tụ, $\forall x$

Vậy miền hội tụ là $X = \mathrm{R}$.

**6.4.2. Chuỗi hàm hội tụ đều**

**1. Định nghĩa**

Chuỗi hàm $\sum u_n(x)$ được goi là hội tụ đều tới hàm S(x) trên X, nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : n > n_0 \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$

**2. Ví dụ**

Chuỗi $\sum \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$ hội tụ với mọi x (theo đlý Leibnitz)

Ta có $|r_n(x)| \le |u_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{x^2 + n + 1} < \dfrac{1}{n+1}, \ \forall x \in \mathrm{R}$

Như vậy $|r_n(x)| < \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon, \forall \ n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$

Do đó $\forall \varepsilon > 0$, lấy $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Khi đó $\forall n \ge n_0, |r_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathrm{R}$

Vậy chuỗi $\sum \dfrac{(-1)^n}{x^2 + n}$ hội tụ đều trên $\mathrm{R}$.

**3. Tiêu chuẩn về sự hội tụ đều**

**a. Định lý (tiêu chuẩn Cauchy)**

*Chuỗi hàm* $\sum u_n(x)$ *hội tụ đều trên X khi và chỉ khi* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, p \in N^*,\ n \geq n_0$

$\Rightarrow \left|u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in X$

**b. Định lý (tiêu chuẩn Weierstrass)**

*Cho chuỗi hàm* $\sum u_n(x)$. *Nếu có một chuỗi số dương* $\sum a_n$ *hội tụ sao cho* $\left|u_n(x)\right| \leq a_n,\ \forall n \geq 1, \forall x \in X$ *thì chuỗi hàm trên hội tụ tuyệt đối và đều trên X.*

Chứng minh.

Rõ ràng chuỗi $\sum \left|u_n(x)\right|,\ \forall x \in X$ hội tụ (theo tiêu chuẩn so sánh)

Do đó chuỗi $\sum u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối.

Vì chuỗi số $\sum a_n$ hội tụ nên ta có

$\left|u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)\right| < |u_{n+1}(x)| + ... + |u_{n+p}(x)| <$

$< a_{n+1} + .... + a_{n+p} < \varepsilon, \forall x \in X$

Theo định lý Cauchy trên, suy ra chuỗi hàm hội tụ đều trên X

*Ví dụ*

Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm

$$\sum \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$$

Ta có $\left|\frac{\cos nx}{n^2 + x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2},\ \forall n \in N^*, \forall x \in \mathrm{R}$

Ta đã biết chuỗi số dương $\sum \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi hàm $\sum \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên R .

**4. Tính chất cơ bản của chuỗi hàm hội tụ đều**

**a. Tính chất 1**

*Cho chuỗi hàm* $\sum_n u_n(x)$ *hội tụ đều về hàm S(x) trên X. Nếu các số hạng* $u_n(x)$ *đều liên tục* $x_0 \in X$ *thì S(x) cũng liên tục tại* $x_0 \in X$.

*Ta có* $\lim_{x \to x} S(x) = S(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sum_n u_n(x) = \sum_n u_n(x_0) = \sum_n \lim_{x \to x_0} u_n(x).$

*Ví dụ*

Tính $\lim_{x \to \pi} \sum_n \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$

Ta thấy chuỗi trên hội tụ đều, có các số hạng liên tục tại $x = \pi$

Do đó $\lim\limits_{x\to\pi}\sum\limits_{n}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}=\sum\limits_{n}\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}=0$

**b. Tính chất 2**

*Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n}u_n(x)$ hội tụ đều về hàm S(x) trên [a, b]. Nếu các số hạng $u_n(x)$ đều liên tục trên [a, b], $\forall n\geq 1$ thì* $\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_a^b\left[\sum u_n(x)\right]dx=\sum\limits_n\int\limits_a^b u_n(x)dx$.

**c. Tính chất 3**

*Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n}u_n(x)$ hội tụ trên (a, b) tới S(x), các số hạng $u_n(x)$, $u'_n(x)$ liên tục trên (a, b). Khi đó nếu chuỗi $\sum\limits_{n}u'_n(x)$ hội tụ đều trên (a, b) thì S(x) khả vi và S'(x) =* $\sum\limits_{n}u'_n(x)$.

**6.4.3. Chuỗi lũy thừa**

**1. Định nghĩa**

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+... \qquad (1)$$

Chú ý

Nếu chuỗi luỹ thừa có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, thì bằng cách đặt $X=x-x_0$ ta đưa chuỗi đó về dạng (1). Vì vậy, ta quy ước nghiên cứu chuỗi lũy thừa có dạng (1).

*Ví dụ*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ trong đó $a_n=\frac{1}{2n+1}$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{7n^2+1}\right)^n(x-2)^n$, trong đó $a_n=\left(\frac{2n-1}{7n^2+1}\right)^n$

**2. Định lý Abel**

*Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ tại $x=x_0\neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x thoả* $|x|<|x_0|$.

Chứng minh:

Giả sử chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ tại $x_0$. Khi đó chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0{}^n$ hội tụ, $a_nx_0^n\to 0$ khi $n\to\infty$. Do đó

$\exists K > 0 : \left| a_n x_0^n \right| \le K,\ \forall n \ge 1$

Ta có $\left| a_n x^n \right| = \left| a_n x_0^n \right| \left| \dfrac{x}{x_0} \right|^n \le K \left| \dfrac{x}{x_0} \right|^n,\ \forall n \ge 1$.

Khi $|x| < |x_0|$ thì $\sum_{n=0}^{\infty} K \left| \dfrac{x}{x_0} \right|^n$ hội tụ (vì $\dfrac{|x|}{|x_0|} < 1$). Do vậy chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ.

3. Hệ quả

Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại $x = x_0$ thì nó phân kỳ tại mọi x thoả $|x| > |x_0|$.

Chứng minh:

Thật vậy nếu có $x_1$ thoả $|x_1| > |x_0|$ mà chuỗi hội tụ tại $x_1$. Khi đó theo định lý Abel nó sẽ hội tụ tuyệt đối tại $\forall |x| < |x_1|$, mà trong khoảng này có chứa điểm $x_0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

**4. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa**

**a. Định nghĩa**

Số $r > 0$ được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ (tuyệt đối) với mọi $|x| < r$, và phân kỳ với mọi $|x| > r$.

<u>Chú ý</u>

Nếu $r = 0$, thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chỉ hội tụ tại $x = 0$.

**b. Định lý (Hadamard)** (Công thức tìm bán kính hội tụ)

*Giả sử* $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *(hoặc* $\rho = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$*). Khi đó bán kính hội tụ được tính bằng công thức:*

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Chứng minh:

Giả sử $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Ta có $\lim \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.|x| = \rho.|x|$

* Nếu $0 < \rho < +\infty$, thì chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $\rho|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\rho}$, phân kỳ khi $|x| > \frac{1}{\rho}$ Do đó bán kính hội tụ $r = \frac{1}{\rho}$

* Nếu $\rho = +\infty$ thì $\forall x \neq 0$, ta có $\lim \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = +\infty$, do đó bán kính hội tụ $r = 0$.

* Nếu $\rho = 0$ thì ta có $\lim \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = 0 < 1$, suy ra chuỗi hội tụ tuyệt đối $\forall x \in R$, do đó bán kính hội tụ r $=+\infty$.

Đối với trường hợp $\rho = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ ta cũng có chứng minh tương tự.

5. Bài toán tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

- *Bước 1*. Tìm bán kính hội tụ $r$ của chuỗi luỹ thừa bằng công thức (*)
- *Bước 2*. Xét tại 2 điểm mút $x = r, x = -r$.
- *Bước 3*. Kết luận miền hội tụ.

Chú ý

Nếu chuỗi lũy thừa có dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, thì bằng cách đặt $X = x - x_0$ ta đưa về dạng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ trước khi áp dụng công thức (*).

*Ví dụ*

Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

- Áp dụng công thức (*) ở trên, ta có $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow r = 1$.

- Xét tại $x = 1$, ta có $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi điều hoà).

- Tại $x = -1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Do đó miền hội tụ của chuỗi là $X = [-1,1)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Ta có $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$. Suy ra $r = 0$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $X = \{0\}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Ta có $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\frac{n!}{1} = 0$. Suy ra $r = +\infty$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $X = \mathrm{R}$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n \left(\frac{1}{x+2}\right)^n$

Ta đặt $t = \frac{1}{x+2}$, ta có chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n t^n$. Ta có

$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Suy ra bán kính hội tụ $r = \frac{1}{\rho} = 2$.

- Xét tại $t = 2$, ta có chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n$.

Chú ý rằng $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}} = e^{\frac{1}{2}} \neq 0$. Do đó chuỗi số là phân kỳ.

- Xét tại $t = -2$. Ta có chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n$. Khi đó

$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}} = e^{\frac{1}{2}} \neq 0$. Do đó chuỗi số phân kỳ.

Vậy tìm hội tụ $-2 < t < 2$, hay $-2 < \frac{1}{x+2} < 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{5}{2} \\ x > -\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Do đó miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $X = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$.

## 6. Tính chất cơ bản của chuỗi lũy thừa

*Giả sử chuỗi luỹ thừa $\sum a_n x^n$ có khoảng hội tụ $(-r, r)$.*

### a. Tính chất 1

*Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên mọi đoạn* $[a;b] \subset (-r;r)$

Chứng minh:

Lấy $0 < x_0 < r$, sao cho $[a,b] \subset [-x_0, x_0]$. Khi đó vì $0 < x_0 < r$ nên chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ. Mặt khác ta lại có $|a_n x^n| \le |a_n x_o^n|, \ \forall x \in [a,b], \forall n$

Do đó chuỗi $\sum a_n x^n$ hội tụ đều trên $[a;b] \subset (-r;r)$.

**b. Tính chất 2**

*Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi trên* $[a;b] \subset (-r;r)$.

**c. Tính chất 3**

*Tổng của chuỗi luỹ thừa là 1 hàm liên tục trong khoảng (-r; r).*

**d. Tính chất 4**

*Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi.*

Chứng minh: Suy ra từ tính chất 1.

Bài tập

Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-1)^n$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x+2)^n$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2n+1}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\left(\frac{2x-3}{x}\right)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+2)}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x+4)^n$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x-2)^n$

### 6.5. Chuỗi Taylor và chuỗi Mac- Laurin

#### 6.5.1. Khai triển 1 hàm thành chuỗi luỹ thừa

**1. Đặt vấn đề**

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong mọi lân cận nào đó của điểm $x_o$ và có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 1 chuỗi luỹ thừa trong lân cận ấy.

**2. Định dạng**

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (0)$$

trong đó $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ là các hằng số

**3. Xác định các hệ số**

Theo tính chất 3 của chuỗi luỹ thừa, trong khoảng hội tụ, ta có:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \dots \quad (1)$$

$$f''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \dots \quad (2)$$

……........................................................... …

$f^{(n)}(x) = n!a_0 + ...$ (n)

……………………………………………………………………
…

Thế $x = x_o$ vào các đẳng thức trên, ta có: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $k = \overline{0,n}$

**4. Kết quả**

Khi đó:

$$f(x) = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{//}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

**6.5.2. Chuỗi Taylor**

**1. Định nghĩa**

Chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ trong lân cận của điểm $x_o$

Khi $x = x_o$: Chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi Mac-Laurin của hàm $f(x)$

Chú ý

Theo trên, nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong $V_{x_0}$ và có thể biểu diễn dưới dạng tổng của 1 chuỗi luỹ thừa trong lân cận ấy thì chuỗi luỹ thừa ấy phải là chuỗi Taylor của hàm đó trong lân cận ấy.

**2. Điều kiện hội tụ**

Ta xét xem nếu chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ nào đó hội tụ thì với điều kiện nào tổng của nó đúng bằng $f(x)$.

a) Ví dụ tổng của chuỗi hội tụ không bằng hàm số

Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & khi\ x \neq 0 \\ 0 & khi\ x = 0 \end{cases}$

Hàm $f(x)$ khả vi vô hạn lần tại mọi x và đạo hàm mọi cấp của $f(x)$ tại $x = 0$

Thật vậy,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \overset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \to \infty} te^{-t^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} =$$

$= 0 \Rightarrow f^{/}(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}\overset{t=\frac{1}{x^2}}{=}\lim_{t\to+\infty}2t^2e^{-t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t^2}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{4t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{4}{e^t}=0$$

$$\Rightarrow \exists\, f''(0)=0$$

……

Vậy, chuỗi Mac-Lau rin của hàm $f$ là:

$0+0x+0x^2+0x^3+...+0x^n+...$ nó hội tụ và có tổng bằng không với mọi $x$

b) Định nghĩa hàm khai triển được thành chuỗi Taylor:

Hàm số $f(x)$ được gọi là khai triển được thành chuỗi Taylor nếu chuỗi Taylor của hàm đó hội tụ và có tổng đúng bằng $f(x)$

c) Các điều kiện đủ

**Định lý 1**

*Giả sử trong một lân cận nào đó của điểm $x_o$ hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp.*

*Nếu* $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ *trong đó* $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

*với $\xi$ là 1điểm nào đó nằm giữa $x_o$ và x thì có thể khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.*

Chứng minh:

Thật vậy, Khai triển Taylor của $f(x)$ đến cấp $n$ là: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ trong đó $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ vì $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ nên $f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$

Mặt khác, $P_n(x)=s_n(x)$ tổng riêng thứ $n$ của chuỗi Tay lor của hàm $f$ , do đó

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \text{ (đ.p.c.m)}$$

**Định lý 2**

*Nếu trong lân cận nào đó của điểm $x_o$ hàm $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và trị tuyệt đối của mọi đạo hàm đó đều bị chặn bởi cùng 1 số thì có thể khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.*

Chứng minh:

Theo giả thiết, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ trong lân cận $V_{x_0}$

$$\Rightarrow \left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^n$$

Do chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ có miền hội tụ là R $\Rightarrow$ số hạng tổng quát $\frac{(x-x_0)^n}{n!}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$$\Rightarrow \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$\Rightarrow$ Hàm $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.

### 6.5.3. Chuỗi Mac-Laurin của 1 số hàm thông dụng

1. $f(x) = e^x$

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \Rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

N là 1 số dương cố định bất kỳ, ta có

$$\forall k \ge 1,\ \forall x \in (-N, N),\ \left|f^{(k)}(x)\right| = e^x \le e^N = M$$

$\Rightarrow f(x)$ khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Mac-Laurin trong lân cận $(-N, +N)$ của $x = x_o = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

2. $y = \sin x$

$$\left|f^{(k)}(x)\right| = \left|\sin(x + k\frac{\pi}{2})\right| \le 1 \quad \forall x$$

$\Rightarrow$ Hàm $f(x) = \sin x$ khai triển được thành chuỗi Mac-Laurin

$$f(0) = 0,\ f^{/}(0) = 1,\ f^{//}(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0, \ldots$$

Vậy, ta có:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

3. $y = \cos x$

Tương tự như trên, chuỗi Mac-Laurin của hàm $f(x) = \cos x$ hội tụ về chính nó trên toàn R:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

4. $y = (1+x)^\alpha$ (Chuỗi nhị thức)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Đặc biệt

* Khi $\alpha = -1$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...$

5. $y = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

<u>Bài tập</u>

1) Khai triển hàm $y = \sqrt{x^3}$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $x = 1$ ( Viết 4 số hạng đầu của chuỗi Taylor)

2) Khai triển hàm $y = \dfrac{1}{x}$ thành chuỗi luỹ thừa của $x - 3$

3) Khai triển thành chuỗi Mac-Laurin các hàm sau;

a) $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

b) $y = x^2 e^x$

c) $y = \sin^2 x$

4) Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ thành chuỗi luỹ thừa của x và tìm miền hội tụ của chuỗi vừa tìm được.